17 Mars 2025 *Masson Vincent*

Corrigé 4

Exercice 1: Analyse dimensionnelle

Une méthode très importante en physique est l'analyse dimensionnelle. Les lois de la physique s'expriment sous forme d'équation du type :

$$Membre\ de\ gauche\ =\ Membre\ de\ droite$$

Une telle égalité implique que :
- Les deux membres sont de même nature c'est-à-dire qu'ils sont tous deux soit des scalaires, soit des vecteurs, soit des tenseurs de même ordre.
- Leurs dimensions sont identiques.

Assurez-vous que la formule $\vec{f} = -\vec{\nabla}p$ vérifie ces deux conditions, avec $\vec{f}$ une densité volumique de force.

Solution:
On vérifie alors que
- La nature des quantités à gauche et à droite est la même : Il s'agit du vecteur de force à gauche et du gradient de la pression à droite. Le gradient d'un scalaire est bien un vecteur et ce point est alors satisfait.
- Les unités doivent être les mêmes. A droite, la pression peut être exprimée par une force par unité de surface, tandis que le gradient est une dérivée spatiale et a donc l'unité de l'inverse d'une longueur. $\vec{f}$ doit alors forcément être une force par unité de volume :

$$f = \vec{\nabla}p$$

$$\frac{\mathcal{F}}{V} = \frac{1}{L}\frac{\mathcal{F}}{S} = \frac{\mathcal{F}}{LS} = \frac{\mathcal{F}}{V}$$

Avec $\mathcal{F}$ une force, V un volume, L une longueur et S une surface.

Exercice 2: Théorème de la Divergence

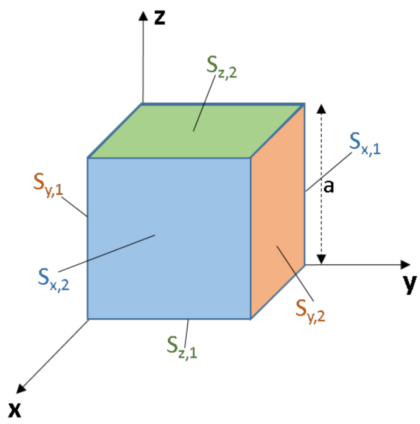
(a) Soit un champ vectoriel $\vec{u}$ stationnaire définit dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère orthonormé O_{xyz}. Ce champ vectoriel est défini tel que $\vec{u}(\vec{r}) = (u_x, u_y, u_z)$ avec $(u_x, u_y, u_z) = (1, 0, 0)$, $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Dessinez le champ vectoriel dans le plan $z = 0$. Que vaut la divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$?

(b) Soit un cube d'arête a, surface S et volume V. Deux sommets sont en $(0, 0, 0)$ et $(a, 0, 0)$. Calculez

$$\oiint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

et vérifiez que le résultat est équivalent à

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dV$$

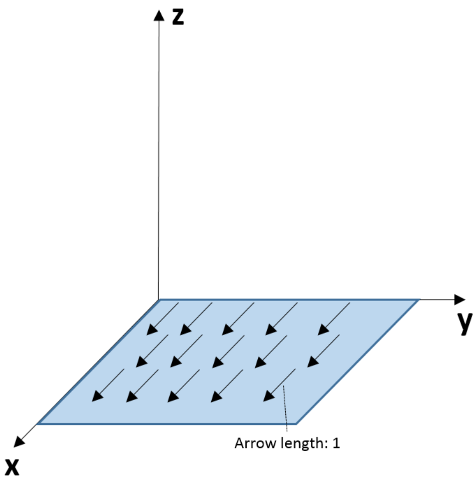


(c) Refaites le calcul de $\oiint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$ pour $\vec{u} = (x, 0, 0)$ et vérifiez que le résultat est équivalent à

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dV$$

Solution:

(a) Le champ vectoriel sur le plan $z = 0$ est représenté dans la figure ci-dessous :



La divergence du $\vec{u} = \vec{u}(x, y, z)$ est définie comme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Toutes les dérivées partielles sont nulles parce que le champ vectoriel $\vec{u}$ est constant sur le plan. Donc $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$.

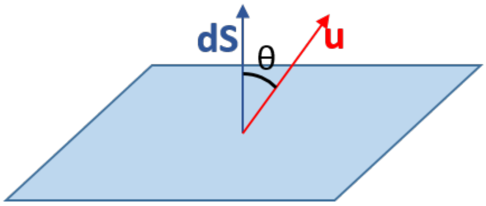
(b) L'intégrale du champ $\vec{u}$ sur la surface latérale du cube est nulle. L'intégrale peut être décomposée comme la somme des intégrales sur chaque surface latérale :

$$\oiint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \left[\iint_{S_{x,1}} + \iint_{S_{x,2}} + \iint_{S_{y,1}} + \iint_{S_{y,2}} + \iint_{S_{z,1}} + \iint_{S_{z,2}} \right] \vec{u} \cdot d\vec{S}$$

La fonction à intégrer est définie comme le produit scalaire entre la vitesse du fluide $\vec{u}$ de norme unitaire et l'élément de surface $d\vec{S}$:

$$\vec{u} \cdot d\vec{S} = dS \cos(\theta)$$

avec θ l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $d\vec{S}$.



Cette expression se simplifie quand les deux vecteurs sont perpendiculaires (vitesse parallèle à la surface) :

$$\vec{u} \cdot d\vec{S} = dS \cos(90°) = 0$$

et quand ils sont parallèles entre eux (vitesse perpendiculaire à la surface, $\theta = 0°$ ou $\theta = 180°$) :

$$\vec{u} \cdot d\vec{S} = dS \cos(0°) = dS$$

$$\vec{u} \cdot d\vec{S} = dS \cos(180°) = -dS$$

Donc, le signe est $+1$ si $d\vec{S}$ et $\vec{u}$ pointent dans la même direction, -1 s'ils pointent dans les directions opposées.

Puisque le champ de la vitesse est parallèle aux faces du cube $S_{y,1}$, $S_{y,2}$, $S_{z,1}$ et $S_{z,2}$, les intégrales correspondantes sont nulles. Les deux autres intégrales se compensent :

$$\begin{aligned}
\oiint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_{x,1}} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{x,2}} \vec{u} \cdot d\vec{S} \\
&= \iint_{S_{x,1}} (-dS) + \iint_{S_{x,2}} dS \\
&= -S + S \\
&= 0
\end{aligned}$$

Comme $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$, on trouve bien $\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dV = 0$. Les résultats sont donc consistants avec le Théorème de la Divergence.

(c) La situation est très similaire à ci-dessus ; la seule différence est que maintenant la norme du champ vectoriel dépend de la position et les contributions à l'intégrale par les faces $S_{x,1}$ et $S_{x,2}$ ne se compensent plus :

$$\begin{aligned}
\oiint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \iint_{S_{x,1}} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_{x,2}} \vec{u} \cdot d\vec{S} \\
&= \iint_{S_{x,1}} 0 \; dS + \iint_{S_{x,2}} a dS \\
&= S \cdot a \\
&= a^3
\end{aligned}$$

L'évaluation de l'intégrale volumétrique de $\vec{\nabla} \cdot \vec{u}$ conduit au même résultat :

$$\begin{aligned}\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) dV &= \iiint_V \frac{\partial u_x}{\partial x} dV \\ &= \iiint_V dV \\ &= a^3\end{aligned}$$

avec dV l'élément de volume.

Exercice 3: Champ de Vitesse

Nous considérons l'écoulement d'un fluide parfait et incompressible ($\rho = \rho_0 = constante$) avec le champ de vitesse suivant :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = -\omega y \vec{e}_x + \omega x \vec{e}_y$$

ω est une constante positive qui s'exprime en s^{-1}.

(a) Indiquez, dans le plan xy, le vecteur $\vec{u}$ aux points suivants :

$(x, y) = (1, 0)$; $(x, y) = (2, 0)$; $(x, y) = (0, 1)$; $(x, y) = (0, 2)$;
$(x, y) = (-1, 0)$; $(x, y) = (-2, 0)$; $(x, y) = (0, -1)$; $(x, y) = (0, -2)$;

Pour les besoins du dessin, supposez $\omega = 1$.

(b) Que pouvez-vous dire sur la valeur de $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$?

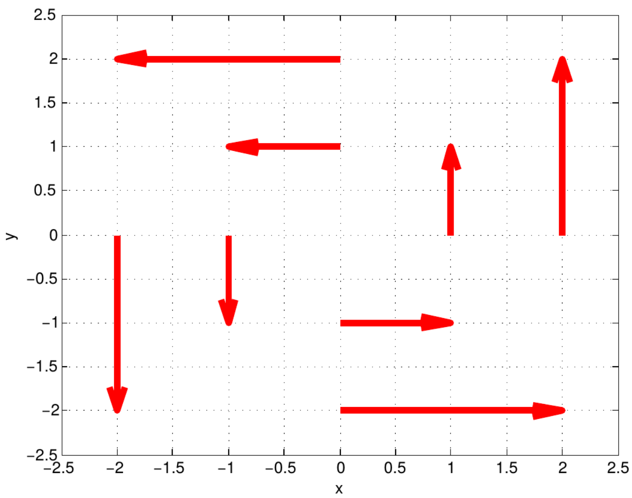
(c) Déterminez l'accélération d'un élément fluide en un point (x, y) arbitraire.

(d) Démontrez que ce champ de vitesse satisfait l'équation de continuité.

(e) Utilisez l'équation d'Euler pour déterminer l'expression du champ scalaire de pression $p(\vec{r}, t)$. Négligez la force de gravité dans l'équation d'Euler et supposez que $p = p_0$ en $\vec{r} = \vec{0}$.

Solution:

(a) La représentation du vecteur vitesse aux points demandées et avec la mise a l'échelle suggérée est visible sur la figure ci dessous.



(b) L'écoulement étant caractérisé par un champ de vitesse ne dépendant pas du temps, l'écoulement peut être considéré comme stationnaire. On a donc $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$.

(c) L'accélération d'un élément fluide est donnée par la formule

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{\mathrm{D}\vec{u}}{\mathrm{D}t} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} \\ &= \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\end{aligned}$$

Or on a vu precedement que $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$, donc

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} \\ &= \left(u_x\frac{\partial}{\partial x} + u_y\frac{\partial}{\partial y}\right)\vec{u} \\ &= \begin{pmatrix} u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} \\ u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-\omega^2 x \\ -\omega^2 y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc

$$\vec{a} = -\omega^2 x\vec{e}_x - \omega^2 y\vec{e}_y$$

(d) Le fluide étant incompressible, sa densité volumique est constante et on a $\rho = \rho_0$. L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} + \rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} + \underbrace{\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\rho}_{=0}$$

Il s'agit donc de s'assurer que $\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = 0$, ce qui est bien le cas :

$$\rho\vec{\nabla}\cdot\vec{u} = \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) = 0 \tag{1}$$

L'équation de continuité est donc bien satisfaite !

(e) Le fluide étant parfait, il n'y pas d'effets liés à la viscosité. En négligeant la gravité, l'équation d'Euler nous donne

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}\right) = -\vec{\nabla}p$$

Donc, l'écoulement étant stationnaire ($\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{0}$), on a

$$\rho\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u} = -\vec{\nabla}p$$

$\rho\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{u}$ a été calculé dans la question (c) de cet exercice.

Projetons maintenant l'équation d'Euler selon les directions $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

— selon $\vec{e}_x$: $-\rho\omega^2 x = -\frac{\partial p}{\partial x}$

— selon $\vec{e}_y$: $-\rho\omega^2 y = -\frac{\partial p}{\partial y}$

Par intégration de la relation selon $\vec{e}_x$, on conclut que :

$$p(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + c_1(y),$$

avec $c_1(y)$ une fonction arbitraire qui ne dépend pas de x.

Par intégration de la relation selon $\vec{e}_y$, on déduit :

$$p(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + c_2(x),$$

avec $c_2(x)$ une fonction indépendante de y.
On a donc que :

$$p(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + \frac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + c_3,$$

avec c_3 un constante.
En utilisant la condition $p(0, 0) = p_0$, on en déduit que :

$$p(x, y) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 \left(x^2 + y^2\right) + p_0$$

Exercice 4: Lignes de courant et trajectoires des éléments fluides

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible dont le champ de vitesse dépend de la position $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ et du temps t selon l'expression suivante :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = u_0\vec{e}_x + u_0 \sin(x - u_0 t)\vec{e}_y$$

où u_0 est une constante positive.

(a) Indiquer, dans le plan xy, en faisant un dessin, le vecteur $\vec{u}$ à $t = 0$ et aux points suivants :

$$\begin{array}{llll} (x, y) = (0, 0) & (x, y) = (\pi/2, 0) & (x, y) = (\pi, 0) & (x, y) = (3\pi/2, 0) \\ (x, y) = (0, 1) & (x, y) = (\pi/2, 1) & (x, y) = (\pi, 1) & (x, y) = (3\pi/2, 1) \\ (x, y) = (0, 2) & (x, y) = (\pi/2, 2) & (x, y) = (\pi, 2) & (x, y) = (3\pi/2, 2) \end{array}$$

Ensuite, à partir de votre dessin, deviner la forme de la ligne de courant passant par le point $(x, y) = (0, 0)$ et l'ajouter au dessin.

(b) Refaire les mêmes étapes que dans la partie a), mais pour le temps $t = \pi/(2u_0)$.

(c) Démontrez que les trajectoires des éléments fluides sont données par

$$\vec{r}_f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 t + x_0 \\ u_0 \sin(x_0)t + y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

où (x_0, y_0, z_0) est la position de l'élément fluide à $t = 0$.
Indication : il suffit de montrer que le $\vec{r}_f(t)$ donné satisfait l'équation

$$\frac{d\vec{r}_f}{dt} = \vec{u}(\vec{r}_f(t), t)$$

(d) Quelle est la forme des trajectoires $\vec{r}_f(t)$? Est-ce que les lignes de courant et la trajectoire des éléments fluides sont identiques pour cet écoulement ? Justifiez votre réponse.

Solution:

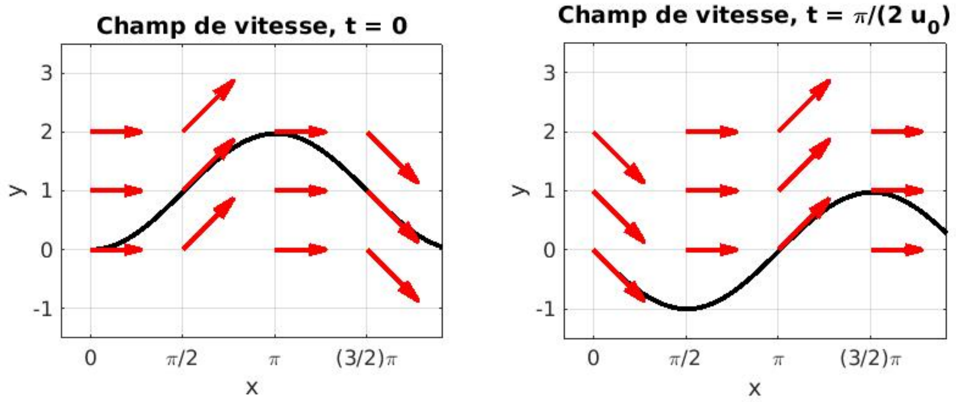
(a) La composante de $\vec{u}$ selon x ne dépend pas de x ni de y ni du temps t, et vaut toujours $u_x = u_0$. La composante de $\vec{u}$ selon y, à $t = 0$, est donnée par

$$u_y = u_0 \sin(x)$$

et ainsi est nulle si $x = 0$ ou $x = \pi$, vaut u_0 si $x = \pi/2$ et $-u_0$ si $x = (3\pi/2)$ (voir table ci-dessous).

y \ x	0	$\pi/2$	π	$(3\pi/2)$
0	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ -u_0 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ -u_0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ -u_0 \end{pmatrix}$

La ligne de courant qui passe par le point $(0,0)$ a une forme sinusoïdale le long l'axe x, voir le dessin.



(b) La composante de $\vec{u}$ selon y, à $t = \pi/(2u_0)$, est donnée par

$$u_y = u_0 \sin(x - \pi/2) = -u_0 \cos(x)$$

et ainsi est nulle si $x = \pi/2$ ou $x = 3\pi/2$, vaut u_0 si $x = \pi$ et $-u_0$ si $x = 0$ (voir table ci-dessous).

y \ x	0	$\pi/2$	π	$(3\pi/2)$
0	$\begin{pmatrix} u_0 \\ -u_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$
1	$\begin{pmatrix} u_0 \\ -u_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} u_0 \\ -u_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_0 \\ 0 \end{pmatrix}$

La ligne de courant qui passe par le point $(0,0)$ a une forme sinusoïdale le long l'axe x, voir le dessin, mais, par rapport au temps $t = 0$, est déplacée vers droite de $\Delta x = \pi/2$.

(c) Un vecteur $\vec{r}_f(t)$ décrit la trajectoire d'un élément fluide dans le champ de vitesse $\vec{u}$ si, et seulement si, il satisfait la relation

$$\frac{d\vec{r}_f}{dt} = \vec{u}(\vec{r}_f(t), t)$$

En utilisant l'expression de $\vec{r}_f(t)$ donnée dans l'énonce, le membre de gauche vaut

$$\frac{d\vec{r}_f}{dt} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_0 \sin(x_0) \\ 0 \end{pmatrix}$$

et, en utilisant l'expression de $\vec{u}$, le membre de droit vaut

$$\vec{u}(\vec{r}_f(t),t) = u_0\vec{e}_x + u_0\sin((u_0t + x_0) - u_0t)\vec{e}_y = u_0\vec{e}_x + u_0\sin(x_0)\vec{e}_y$$

ce qui démontre l'égalité.

(d) Comme la composante de $\vec{r}_f(t)$ selon $\vec{e}_z$ est constante par rapport au temps, le mouvement se déroule dans le plan xy. La trajectoire est une ligne droite, passant par le point (x_0, y_0), vu que les composantes de $\vec{r}_f(t)$ selon $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ dépendent linéairement du temps. Ainsi la forme de $\vec{r}_f(t)$ est différent de la forme sinusoïdale des lignes de courant.

Exercice 5: Dérivation de l'équation de continuité (description Lagrangienne)

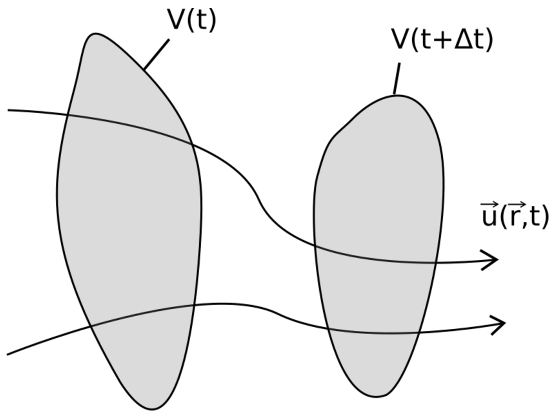
(a) Soit $f(\vec{r},t)$ un champ scalaire et $V(t)$ un volume qui se déplace avec le champ vectoriel de vitesse $\vec{u}(r,t)$. A partir de la règle de Leibniz, donnée ci-dessous :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} f dV = \iiint_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oiint_{S(t)} f\vec{u}\cdot d\vec{S}$$

avec $S(t)$ la surface entourant le volume $V(t)$, démontrez la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V(t)} f dV = \iiint_{V(t)} \left(\frac{D}{Dt}f + f(\vec{\nabla}\cdot\vec{u})\right) dV$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})$ dans l'intégrale du membre de droite est la dérivée convective.



(b) Dans le cours, on a dérivé l'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{u}) = 0$ en appliquant le principe de la conservation de masse à un volume V fixé dans le temps (description Eulérienne) et en l'absence de toute source/perte.
Dérivez l'équation de continuité en considérant un volume $V(t)$ qui se déplace avec l'écoulement (description Lagrangienne).

Solution:

(a) Avec le Théorème de la Divergence on peut écrire :

$$\oiint_{S(t)} f\vec{u}\cdot d\vec{S} = \iiint_{V(t)} \vec{\nabla}\cdot(f\vec{u})dV$$

En utilisant la formule :

$$\vec{\nabla}\cdot(f\vec{u}) = \vec{u}\cdot\vec{\nabla}f + f(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}) \textit{ (Série 1, Exo 1 (a))}$$

Et en sachant que $\vec{u} \cdot \vec{\nabla} f = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) f$, on obtient :

$$\oiint_{S(t)} f \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iiint_{V(t)} \Big((\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) f + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \Big) \, dV$$

On trouve donc :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} f dV &= \iiint_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \oiint_{S(t)} f \vec{u} \cdot d\vec{S} \\
&= \iiint_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) f + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right) dV \\
&= \iiint_{V(t)} \left((\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}) f + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right) dV \\
&= \iiint_{V(t)} \left(\frac{D}{Dt} f + f (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right) dV
\end{aligned}$$

(b) En absence de toute source/perte, la masse dans le volume $V(t)$ ne varie pas au cours du temps. Donc :

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{V(t)} \rho(\vec{r}, t) dV = 0$$

Avec le résultat de (a), on peut écrire :

$$\iiint_{V(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \right) dV = 0$$

Ceci est valable pour n'importe quel volume $V(t)$ et on conclut que :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = 0$$

Avec la définition $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})$, on trouve :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

Qui est l'équation de continuité dérivée dans le chapitre 2.3.1 du cours.